

Gustaw Rakowski
Zbigniew Kacprzyk

Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji

Wydanie trzecie zmienione

Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej
Warszawa 2016

Przedmowa do wydania trzeciego

Kolejne wydanie¹ książki ukazuje się po 10 latach od poprzedniego. W tym czasie wydano wiele prac naukowych poświęconych metodzie elementów skończonych. Wiele z nich dotyczy problematyki weryfikacji i walidacji obliczeń, opisu fizycznego materiału. Znacząca liczba prac jest poświęcona integracji środowiska komputerowego wspomagania projektowania i analizy metodą elementów skończonych.

Z punktu widzenia inżyniera konstruktora metoda elementów skończonych ma dwie duże wady: w metodzie brakuje prostych i skutecznych narzędzi oceniających poprawność i wiarygodność obliczeń oraz systemy komputerowe MES są słabo zintegrowane z systemami komputerowego projektowania.

Jeśli chodzi o pierwszą wadę to mimo dużej liczby prac teoretycznych ciągle nie ma rozwiązań umożliwiających łatwą implementację komputerową. Ciągłe najważniejszym kryterium poprawności obliczeń złożonych analiz jest wiedza i umiejętności autora obliczeń.

Niewątpliwie kluczową nowością ostatnich lat jest analiza izogeometryczna. W analizie izogeometrycznej ujednocila się opis geometrii używany w systemach projektowania z opisem stosowanym w metodzie elementów skończonych. Analizie izogeometrycznej poświęcony jest nowy, 10 rozdział książki.

Jeśli chodzi o zmiany w oprogramowaniu MES to obserwujemy dynamiczny rozwój automatyzacji obliczeń konstrukcji budowlanych. Od kilku lat promowana jest idea BIM (Building Information Modeling). W ujęciu BIM obiekt budowlany modelowany jest precyzyjnie w przestrzeni trójwymiarowej. Na podstawie takiego modelu wykonuje się model obliczeniowy. Uwzględniając specyfikę modelowania konstrukcji budowlanych czynność tę można w dużym stopniu zautomatyzować.

Z bieżącego wydania usunięto tabulogramy przykładów z komendami systemu FEAS/KAM. Wszystkie tabulogramy zostały umieszczone na stronie WWW książki: <http://wektor.il.pw.edu.pl/~zk/mes/2>.

Zasadnicza część książki, dotycząca ogólnych idei MES, zachowuje nadal swą aktualność i nie została zmieniona. Zmianie uległy dodatki. Usunięto dodatek zawierający wprowadzenie do systemu ABAQUS. Usunięty dodatek jest zamieszczony na stronie WWW poświęconej książce.

Po zmianach książka przyjęła formę monografii z zakresu metody elementów skończonych i stanowi kompendium wiedzy podstawowej niezbędnej w pracy inżyniera wykorzystującego MES w obliczeniach czy też studenta studiującego metodę elementów skończonych.

Zbigniew Kacprzyk
Warszawa, listopad w 2015 roku

¹obecne wydanie książki w rzeczywistości jest czwartym: pierwsze wydanie ukazało się w 1993 roku, pierwsze poprawione - w styczniu 2005, drugie wydanie - w grudniu 2005

²jeśli adres będzie nieosiągalny to drugim adresem jest <http://www.feas.pl>

Spis treści

Przedmowa	7
Przedmowa do wydania drugiego	9
Przedmowa do wydania trzeciego	11
1 Wprowadzenie	13
1.1 Ogólna charakterystyka metod obliczeniowych	13
1.2 Syntetyczny opis metody elementów skończonych (MES)	20
1.3 Wybrane przykłady zastosowań MES	28
2 Technika MES na przykładzie analizy konstrukcji ramowych	32
2.1 Podatność i sztywność	32
2.2 Podstawowe równania pręta	35
2.3 Element ramy	40
2.3.1 Algorytm wyznaczania macierzy sztywności elementu	52
2.3.2 Podłoże typu Winklera	53
2.3.3 Kondensacja statyczna i modyfikacja macierzy sztywności	55
2.3.4 Wpływ obciążeń międzywęzłowych	57
2.4 Globalna macierz sztywności	62
2.4.1 Transformacje w układach kartezjańskich	62
2.4.2 Uwzględnianie mimośrodków	68
2.4.3 Warunki równowagi i zgodności w węzłach	71
2.4.4 Warunki brzegowe	79
2.4.5 Tablica alokacji	84
2.5 Przykład analizy statycznej ramy płaskiej	89
3 Algorytmy MES	94
3.1 Wybrane algorytmy numeryczne	94
3.2 Algorytmy ideowe	102
3.3 Algorytm użytkownika systemu	110
4 Analiza statyczna konstrukcji dwu- i trójwymiarowych	113
4.1 Elementy tarczowe	113
4.1.1 Podstawowe równania tarczy	113
4.1.2 Element prostokątny	117
4.1.3 Element trójkątny	122
4.1.4 Uogólnione parametry węzłowe	126
4.1.5 Elementy wyższych rzędów	129
4.2 Element pierścieniowy	133
4.3 Elementy trójwymiarowe	137
4.3.1 Element czworościenny	137
4.3.2 Inne elementy trójwymiarowe	141
4.4 Element płytowy	144
4.4.1 Podstawowe równania płyty cienkiej	144

4.4.2	Element prostokątny	149
4.4.3	Element trójkątny	154
4.4.4	Przykłady elementów płytowych dostosowanych	159
4.4.5	Warunki brzegowe	162
4.5	Elementy powłokowe	164
4.5.1	Podstawowe równania technicznej teorii powłok cienkich mało wy- niosłych	166
4.5.2	Płaski trójkątny element powłokowy	171
4.5.3	Prostokątny element powłoki translacyjnej	176
4.5.4	Stożkowy element pierścieniowy	186
4.5.5	Warunki brzegowe w powłokach	189
4.6	Przykłady zastosowania MES	190
5	Wybrane problemy analizy elementu	199
5.1	Koncepcja superelementu	199
5.2	Element izoparametryczny	201
5.2.1	Rozważania wstępne	201
5.2.2	Szczególne postacie współrzędnych naturalnych – współrzędne ba- rycentryczne	216
5.2.3	Zdegenerowane elementy izoparametryczne	221
5.2.3.1	Belka Timoshenki	221
5.2.3.2	Płyta Mindlina	225
5.2.3.3	Element powłokowy Ahmada	228
5.2.4	Niektóre problemy ujęcia izoparametrycznego	232
5.3	Przykład zastosowania elementów izoparametrycznych	237
6	Metoda elementów skończonych w zagadnieniach dynamiki	240
6.1	Równanie ruchu	240
6.2	Macierz bezwładności	243
6.2.1	Macierz bezwładności kratownicy	243
6.2.2	Macierz bezwładności ramy płaskiej	244
6.2.3	Macierz bezwładności ramy przestrzennej	245
6.2.4	Macierz bezwładności tarczy (PSN, PSO)	246
6.2.5	Macierz bezwładności płyty	247
6.2.6	Macierz bezwładności bryły	248
6.2.7	Diagonalizacja macierzy bezwładności	248
6.3	Macierz tłumienia	248
6.4	Drgania swobodne	249
6.5	Redukcja liczby stopni swobody	252
6.6	Numeryczne całkowanie równania ruchu	254
6.6.1	Uogólniona metoda różnic skończonych	254
6.6.2	Metoda SSpj (Zienkiewicza–Wood) ¹	259
6.6.3	Metoda Newmarka	263
6.6.4	Metoda Wilsona	265
6.6.5	Metoda Houbolta	267
6.6.6	Analiza metod numerycznego całkowania równania ruchu	269
6.7	Superpozycja modalna	278

6.8	Przykłady analizy dynamicznej	281
7	Podstawy analizy nieliniowej	286
7.1	Nieliniowości w mechanice konstrukcji	286
7.2	Metody numeryczne w analizie nieliniowej	291
7.2.1	Metoda przyrostowa	291
7.2.2	Metoda iteracyjna	294
7.2.3	Metoda mieszana	301
7.2.4	Analiza porównawcza metod	302
7.3	Nieliniowość geometryczna w prętach	305
7.3.1	Element kratownicy płaskiej	305
7.3.2	Element ramy płaskiej	307
7.4	Ścieżka równowagi	310
7.5	Stateczność początkowa	316
7.6	Stateczność z udziałem sił bezwładności	321
8	Problemy przewodnictwa ciepła	327
8.1	Analiza ustalonego przewodnictwa ciepła w ujęciu MES	327
8.2	Zagadnienie dwuwymiarowe	331
8.3	Zagadnienie trójwymiarowe	334
9	Inne koncepcje i ujęcia MES	337
9.1	Ujęcie naprężeniowe i hybrydowe	337
9.1.1	Ujęcie naprężeniowe	337
9.1.2	Ujęcie hybrydowe	340
9.2	Techniki adaptacyjne	342
9.2.1	Rozważania wstępne	342
9.2.2	Określenie i miara błędu	344
9.2.3	Oszacowania <i>a priori</i>	346
9.2.4	Oszacowania <i>a posteriori</i>	347
9.2.4.1	Odtwarzanie L_2	347
9.2.4.2	Punkty superzbieżności	349
9.2.4.3	Koncepcja łaty	351
9.2.5	Rozszerzenie N w wersji p z elementami hierarchicznymi	353
10	Analiza izogeometryczna w MES	359
10.1	Wstęp	359
10.2	Krzywe	360
10.2.1	Krzywe B-splajn	360
10.2.2	Krzywe NURBS	363
10.2.3	Powierzchnie B-splajn i powierzchnie NURBS	365
10.2.4	T-splajny	367
10.3	Algorytm Analizy Izogeometrycznej	368
10.4	Siatki MES i adaptacja	370
10.4.1	Adaptacja	370
10.4.2	Techniki adaptacji w analizie izogeometrycznej	370
10.5	Dwuwymiarowe zadanie teorii sprężystości	373

10.5.1	Element skończony tarczy w ujęciu izogeometrycznym	373
10.5.2	Przykład	373
10.6	Zastosowanie analizy izogeometrycznej w obliczaniu rozkładu temperatury	374
10.7	Podsumowanie i wnioski	376
11	Problemy komputerowej implementacji MES	379
11.1	Rozwiązywanie układu równań	380
11.1.1	Rozwiązywanie metodą bezpośrednią	380
11.1.2	Obliczanie energii	384
11.1.3	Rozwiązywanie metodą iteracyjną	385
11.1.4	Problemy współpracy z pamięcią zewnętrzną komputera	386
11.2	Obliczanie wartości i wektorów własnych	388
11.2.1	Wyznaczanie dominującej wartości własnej metodą iteracji odwrotnej	388
11.2.2	Iteracja podprzestrzenna	389
11.3	Generowanie siatek	390
11.3.1	Technika prymitywów	391
11.3.2	Technika superelementów	393
11.3.3	Triangularyzacja	394
12	Modelowanie tworzyw i obiektów inżynierskich za pomocą MES	400
12.1	Modelowanie fizyczne konstrukcji	401
12.2	Modelowanie żelbetu	406
12.2.1	Model tarczy żelbetowej	406
12.2.2	Modele konstrukcji zginanych	408
12.2.3	Model konstrukcji trójwymiarowych	411
12.3	Modelowanie obszarów z różnymi stopniami swobody	413
12.3.1	Elementy przejściowe	413
12.3.1.1	Szeregowy element przejściowy rama–tarcza	413
12.3.1.2	Równoległy element przejściowy rama–tarcza	417
12.4	Nowe trendy w komputerowym modelowaniu materiałów	419
A	Interpolacja Lagrange’a, Serendipa i Hermita	423
A.1	Interpolacja Lagrange’a	423
A.2	Funkcje Serendipa	425
A.3	Interpolacja Hermita	427
B	Całkowanie numeryczne	430
	Literatura	434

Literatura Bibliography

- [1] *Babuska I., Zienkiewicz O.C., Gago J., Oliveira E.R.*: Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations. Wiley, New York 1986.
- [2] *Barlow J.*: Optimal Stress Location in Finite Element Models. Inter. Journ. Num. Meth. Eng., 10, s. 243-251, 1975.
- [3] *Bathe K.J.*: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, New Jersey 1982.
- [4] *Bazilev Y., Calo V.M., Cottrell J.A., Evans J.A., Hughes T.J.R., Lipton S., M.A. Scott M.A. and Sederberg T.W.*: Isogeometric analysis using T-splines, Comput. Methods Appl. Mech. Engng, 199, pp. 229-263, 2010.
- [5] *Benson D.J.*: Bazilevs Y., Hsu M.C., Hughes T.J.R., The Reissnes-Mindlin shell, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg., 199, pp.276-289, 2010.
- [6] *Bell K.*: On the Quintic Triangular Plate Bending Element. NTH Report No. 72-2, Trondheim 1972.
- [7] *Berg S.*: Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Plates. NTH, Trondheim Report No. 73-1, 1973.
- [8] *Branicki Cz., Ciesielski R., Kacprzyk Z., Kawecki J., Kęczkowski Z., Rakowski G.*: Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe. Tom 1-2. Arkady, 1991-92.
- [9] *Cichoń Cz. Cecot W., Krok J., Pluciński P.*: Metody komputerowe w liniowej mechanice konstrukcji. Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2010.
- [10] *Cook R.D.*: Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons, 1981.
- [11] *Cortell J.A., Hughes T.J.R., Reali A.*: Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg., 196, pp.4160-4183, 2007.
- [12] *Cristofield M.A.*: A Fast Incremental Iterative Solution Procedures that Handles Snup-Through. Computers & Structures, vol. 13, s. 56-62, 1981.
- [13] *Gallagher R.H.*: Finite Element Analysis. Springer Verlag, Berlin 1976.
- [14] *Gawroński W., Kruszeński J., Ostachowicz W., Tarnowski J., Wittbrodt E.*: Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji. Arkady Warszawa 1984.
- [15] *Gilewski W., Gomuliński A.*: Physical Shape Functions: A New Concept in Finite Elements, FEN No. 3 (1990).
- [16] *Gomuliński A., Kacprzyk Z., Maj M., Pawłowska B., Sokół T.*: Biblioteka Elementów Skończonych. Poradnik. Praca zb. pod kierunkiem Z. Kacprzyka, Warszawa 1989.
- [17] *Grisfield K.A.*: Non-linear Finite Element Analysis of Solid and Structures, vol. 3. Wiley, Chichester 1991.
- [18] *Grodzki Z., Jankowski J., Kacprzyk Z., Maj M., Orysiak J., Sokół T.*: Podręcznik użytkownika podsystemu FEAS/KAM. Praca zb. pod kierunkiem Z. Kacprzyka, Warszawa 1990.
- [19] *Grodzki Z., Kacprzyk Z., Kurowski A., Maj M., Sokół T.*: Podręcznik użytkownika systemu FEAS. Praca zb. pod kierunkiem Z. Kacprzyka, Wyd. Inż. Łąd., Warszawa 1993.
- [20] *Hinton E., Owen D.R.J.*: Finite element software for plates and shells. Pineridge Press Limited, Swansea 1984
- [21] *Hinton E., Owen, D.R.J.*: Computational Modeling of Reinforced Concrete Structures. Pineridge Press Limited, Swansea 1986.
- [22] *Hughes T.J.R., Cohen M., Haroun M.*: Reduced and Selective Integration Techniques in the Finite Element Analysis of Plates. Nuc. Eng. Des., vol. 46, s. 203-222 (1978).

-
- [23] *Hughes T.J.R., Cottrell J.A., Bazilevs Y.*: Isogeometric analysis, Wiley 2009.
- [24] *Hughes T.J.R., Cottrell J.A., Bazilevs Y.*: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194, pp.4135–4195, 2005
- [25] *Hughes T.J.R., Reali A., Sangalli G.*: Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199, pp.301-313, 2010.
- [26] *Kacprzyk Z.*: Analiza drgań komina przemysłowego obciążonego sejsmicznie. *Arch. Inż. Ląd.* 1981, 27, 3, s. 507-516.
- [27] *Kacprzyk Z.*: O stosowaniu funkcji wagowych w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo*, z. 85, 1984.
- [28] *Kacprzyk Z.*: Superelement czasoprzestrzeny. *Arch. Inż. Ląd.* 1981, 28, 1-2, s. 37-42.
- [29] *Kacprzyk Z., Maj M., Pawłowska B. Sokół T.*: *Poradnik Metody Elementów Skończonych*. Wydawnictwo Zakładu Mechaniki Budowli i Zastosowań Informatyki, Warszawa 2011. ISBN 978-83-934725-0-5
- [30] *Kacprzyk Z., Lewiński T.*: Comparison of some numerical integration methods for the equations of motion of systems with a finite number of degrees of freedom. *Rozprawy Inżynierskie*, 31, 2, s. 213-240, 1983.
- [31] *Kacprzyk Z., Orysiak J.*: Generacja siatki w obszarze dwuwymiarowym. *Met. Kom. w Inż. Ląd.*, nr 1-2, s. 81-96, 1992.
- [32] *Kacprzyk Z., Ostapska-Luczowska K.*: Isogeometric Analysis as a New FEM Formulation - Simple Problems of Steady State Thermal Analysis. In: XXIII Russian - Polish - Slovak Seminar "Theoretical Foundation of Civil Engineering", 25-29 August 2014, Wrocław.
- [33] *Kacprzyk Z., Pawłowska B.*: Generatory siatek struktur przestrzennych. *Met. Kom. w Inż. Ląd.*, nr 4, s.19-33, 1999.
- [34] *Kacprzyk Z., Pawłowska B.*: *Komputerowe Wspomaganie Projektowania. Podstawy i przykłady*. OWPW, Warszawa 2012.
- [35] *Kacprzyk Z., Pawłowska B.*: (1996) Wpływ modelu budynku wysokiego na obliczeniowe drgania własne. *Met. Kom. w Inż. Ląd.*, nr 6, s.43-56, 1996.
- [36] *Kacprzyk Z., Trybicki Z.*: Tarczowy izogeometryczny element skończony. *Theoretical Foundation of Civil Engineering*, XXI . Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Moscow-Arkhangels 2012, s. 165-170
- [37] *Kacprzyk Z., Trybicki Z.*: Isogeometric plane stress analysis, 20th International Conference on Computer Methods in Mechanics. Short Papers. *Editors: Łodygowski T., Rakowski J., Garbowski T., Sumelka W.*, pp. MS03-07-08, Poznań 2013,.
- [38] *Kacprzyk Z., Witkowski M.*: Drgania płyty wywołane siłą poruszającą się asymetrycznym ruchem niejednostajnym. *Konferencja Naukowa Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej*, 1986, Warszawa, s. 36-42.
- [39] *Kączkowski Z.*: General formulation of the stiffness matrix for the space-time finite elements. *Arch. Inż. Ląd.* 1979, 25, 3, s. 351-357.
- [40] *Kączkowski Z.*: Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Arch. Inż. Ląd.* 1976, 22, 3, s. 365-378.
- [41] *Kączkowski Z.*: *Płyty. Obliczenia statyczne*. Arkady, Warszawa 1980.
- [42] *Kączkowski Z.*: The method of finite space-time elements in dynamics of structures. *J. Techn. Phys.* 1975, 16, 1, s. 69-84.

- [43] *Kiciak P.*: Podstawy modelowania krzywych i powierzchni, WNT, Warszawa 2000.
- [44] *Kleiber M.*: Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. PWN, Warszawa-Poznań 1985.
- [45] *Kleiber M.*: Wprowadzenie do metody elementów skończonych. PWN, Warszawa-Poznań 1989.
- [46] *Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najber F., Grabowski J.*: Metoda sztywnych elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1975.
- [47] *Langer J., Klasztorny M.*: Bezwarunkowo stabilne jednokrokowe algorytmy numerycznego całkowania liniowych równań ruchu. Met. Komp. w Inż. Łąd., nr 3-4, t. 1, s. 13-31, 1991.
- [48] *Lewiński P.M.*: Nieliniowa analiza płyt i tarcz żelbetowych Metodą Elementów Skończonych. PWN, Warszawa – Łódź 1990.
- [49] *Lodygowski T., Kąkol W.*: Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji. Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1991.
- [50] *Macneal R.H.*: Perspective on finite elements for shell analysis, Finite Elements in Analysis and design, 30, pp. 175-186, 1998.
- [51] *Martin H.C., Carey G.F.*: Introduction To Finite Element Analysis. Mc Graw-Hill, New York 1984.
- [52] *Megörd G.*: Analysis of Thin Shells Using Planar and Curved Finite Elements. NTH Report No 96-1, Trondheim 1969.
- [53] *Ostapska-Luczowska K.*: Isogeometric Analysis as a new FEM formulation - simple problems of steady state thermal analysis. Masters thesis, Warsaw University of Technology, Faculty of Civil Engineering, 2014
- [54] *Rakowski J.*: A Critical Analysis of Quadratic Beam Finite Elements. Int. Journ. Num. Meth. Eng., vol. 31, s. 949-966 (1991).
- [55] *Robinson J.*: An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique. Finite Element in Analysis and Design 1986, 2, s. 377-388, North-Holland.
- [56] *Ross C.T.F.*: Finite element methods in structural mechanics. Ellis Horwood Limited, 1985.
- [57] *Rypl D., Tatzak B.*: From the finite element analysis to the isogeometric analysis in an object oriented computing environment, Advances in Engineering Software, 44, pp.116-125, 2012.
- [58] *Sederberg, T.-W., Zheng, J., Bakenov, A., and Nasri, A.*: T-Splines and T-NURCCs, ACM Transactions on Graphics, 22(3), pp.477-484, 2003
- [59] *Sharan S.K.*: Finite Elements for Infinite Media. FEM in the Design Process, Great Bidlake Manor, Devon 1990.
- [60] *Stein E.*: Milestones of Direct Variational Calculus and its Analysis from the 17th Century until today and beyond – Mathematics meets Mechanics – with restriction to linear elasticity, CAMES, 19, pp. 7-91, 2012
- [61] *Szabo B.A.*: Estimation and Control of Error Based on p -Convergence. Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations. Edited by *I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J. Gago, E.R. de A.Oliveira*, John Wiley-Sons, Chichester 1986.
- [62] *Szabo B.A.*: The p - and h - p Versions of the Finite Element Method in Solid Mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1990, 80, s. 185-195, North-Holland.
- [63] *Szülard R.*: Finite Berechnungsmethoden der Strukturmechanik. Bd. 1,2. Wilhelm Ernst Verlag, Berlin 1982-87.

-
- [64] *Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M.*: Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji. Arkady, Warszawa 1979.
- [65] *Waszczyzyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.*: Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji. Arkady, Warszawa 1990.
- [66] *Wiberg N.E., Abdulwahab F.*: Patch Recovery Based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium. *Inter. Journ. Num. Meth. Eng.*, 36, s. 2703-2724, 1993.
- [67] *Young T.Y.*: Finite element structural analysis. Prentice-Hall, 1986.
- [68] *Zienkiewicz O.C.*: The Finite Element Method. McGraw-Hill, 1977.
- [69] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.* : The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Seventh Edition, Elsevier 2013
- [70] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D.* : The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Seventh Edition, Elsevier 2013
- [71] *Zienkiewicz O.C., Wood W.L., Hine N.W., Taylor R.L.*: A unified set of single step algorithms. *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 20, s. 1529-1552, 1984.
- [72] *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.*: A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. *Inter. Journ. Num. Meth. Eng.*, 24, s. 337-357, 1987.
- [73] *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.*: Adaptivity and Mesh Generation. *Inter. Journ. Num. Meth. Eng.*, 32, s. 783-810, 1991.
- [74] *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.*: The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1, *Inter. Journ. Num. Meth. Eng.*, 33, s. 1331-1361, 1992.