D1. Algebra macierzy

W niniejszym dodatku podamy podstawowe operacje macierzowe oraz niektóre techniki algebry macierzowej nie dbając szczególnie o formalizm matematyczny. Zakres jest wystarczający dla zrozumienia i swobodnego posługiwania się wiadomościami zawartymi w tym podręczniku.

D1.1. Definicje

Prostokątna tablica m razy n liczb umieszczonych w m poziomych wierszach i n pionowych kolumnach nazywa się macierzą:

$$\boldsymbol{A} = \left[\, a_{ij} \,\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{D1-1}$$

Liczby a_{ij} są elementami macierzy; indeks i oznacza numer wiersza, indeks j – numer kolumny, w których znajduje się element a_{ij}. Liczby a_{11}, a_{22}, a_{33}, $a_{44}, \dots$ znajdujące się na głównej przekątnej określają diagonalę macierzy. Wymiar macierzy oznacza się przez $(m \times n)$. W szczególności, wiersz $\left[\, a_1 \;\, a_2 \;\, \dots \;\, a_n \,\right]$ jest przykładem macierzy wierszowej o wymiarze $(1 \times n)$, a kolumna $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}$ – macierzy kolumnowej o wymiarze $(m \times 1)$.

Macierz kolumnowa nazywana jest wektorem i niekiedy oznaczana przez

$$\mathrm{col}(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

lub

$$\left[\, a_1 \;\, a_2 \;\, \dots \;\, a_m \,\right]^T$$

albo

$$\left\{\, a_1,\; a_2,\; \dots\;,\; a_m \,\right\}\;.$$

Jeśli elementami macierzy są inne macierze, to taka macierz nazywa się blokową, np.

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \hline \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right]\;. \tag{D1-2}$$

Macierz, w której liczba wierszy i kolumn jest jednakowa, nazywa się kwadratową, a liczbę tę stopniem macierzy, np.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{D1-3}$$

jest macierzą kwadratową stopnia trzeciego. Macierz kwadratowa, w której wszystkie elementy z wyjątkiem leżących na diagonali są równe zeru, nazywa się macierzą diagonalną:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{D1-4}$$

Szczególnym przypadkiem macierzy diagonalnej jest macierz jednostkowa, zawierająca na diagonali same 1.

Macierz kwadratowa, której elementy spełniają równość: $a_{ij} = a_{ji}$, nazywa się symetryczną.

Macierz kwadratowa, w której tylko elementy leżące na diagonali i powyżej są różne od zera, nazywa się macierzą trójkątną górną:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{D1-5}$$

Macierz kwadratowa, w której tylko elementy leżące na diagonali i poniżej są różne od zera, nazywa się macierzą trójkątną dolną:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{D1-6}$$

Macierz zawierająca same zera nazywa się zerową.

Macierz pasmowa jest macierzą, której wszystkie niezerowe elementy leżą na diagonali i w k równoległych do niej liniach z obu stron, tworząc pasmo wokół diagonali:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{D1-7}$$

Szerokość pasma wynosi $2k+1$. Liczbę k+1 nazywa się szerokością półpasma. Na przykład, macierz:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & & & \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & 0 & \\ & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \\ & & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} \\ & 0 & & \delta_{54} & \delta_{55} \end{bmatrix}$$

jest macierzą pasmową o szerokości pasma równej 3.

D1.2. Działania na macierzach

D1.2.1. Dodawanie i odejmowanie macierzy

Dodawanie i odejmowanie macierzy może być dokonywane jedynie na macierzach o tych samych wymiarach

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & ... & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} . \tag{D1-8}$$

Zachodzą przemienność dodawania oraz łączność:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \ , \\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) \ . \end{gathered} \tag{D1-9}$$

D1.2.2. Mnożenie macierzy przez liczbę

Możliwe jest mnożenie macierzy przez liczbę rzeczywistą k:

$$k\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix} . \tag{D1-10}$$

D1.2.3. Transpozycja

Macierz $\boldsymbol{A}^T$ o elementach a_{ij}^T jest macierzą transponowaną do macierzy $\boldsymbol{A}$, jeśli między ich elementami zachodzi związek

$$a_{ij} = a_{ji} \ . \tag{D1-11}$$

Prawdziwe są następujące równości:

$$\begin{gathered} (\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A} \ , \\ (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T \pm \boldsymbol{B}^T \ , \\ (\alpha \boldsymbol{A}) = \alpha \boldsymbol{A}^T, \ \alpha -- \ \text{liczba} \ , \\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T \ , \\ \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^T) \ , \end{gathered}$$

tzn. wyznacznik macierzy kwadratowej nie zmienia się przy jej transponowaniu.

Jeśli $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, to macierz kwadratowa jest symetryczna.

Jeśli $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$, to macierz kwadratowa jest skośnie symetryczna (na diagonali są wtedy same zera).

Macierz transponowana do macierzy blokowej (D1-2) ma postać:

$$\boldsymbol{A}^T = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}_{11}^T & \boldsymbol{B}_{12}^T \\ \hline \boldsymbol{B}_{21}^T & \boldsymbol{B}_{22}^T \end{array}\right] . \tag{D1-12}$$

D1.2.4. Mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy zdefiniowane jest związkiem

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \ , \tag{D1-13}$$

gdzie wymiary poszczególnych macierzy są następujące:
$\boldsymbol{A}\,[m \times p]$, $\boldsymbol{B}\,[n \times p]$, $\boldsymbol{C}\,[m \times p]$.
Elementy c_{ij} macierzy $\boldsymbol{C}$ są określone wzorem

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} \ . \tag{D1-14}$$

Elementy macierzy $\boldsymbol{C}$ są otrzymywane przez mnożenie kolumn macierzy $\boldsymbol{B}$ i wierszy macierzy $\boldsymbol{A}$.

Bardzo pomocnym narzędziem podczas wykonywania mnożeń macierzy jest tak zwany schemat Falka. Schemat ten zostanie przedstawiony na przykładzie.

Przykład D1-1

Weźmy dwie prostokątne macierze $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, których elementami są liczby rzeczywiste:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} , \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \tag{D1-15}$$

Zatem zgodnie z D1-13 i D1-14

$$\underset{3\times 5}{\boldsymbol{C}} = \underset{3\times 6}{\boldsymbol{A}} \ \underset{6\times 5}{\boldsymbol{B}} \ . \tag{D1-16}$$

Jeśli macierze te zapiszemy zgodnie z rys. D1-1, to elementy macierzy $\boldsymbol{C}$ otrzymamy drogą mnożenia wyrazów znajdujących się w odpowiednich wierszach i kolumnach.

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 27 & 7 & 24 & 8 & 15 \\ 6 & 2 & 5 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & 8 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{C} \end{array}$$

Rys. D1-1

W MES częstym działaniem macierzowym jest obliczenie wg następującego schematu:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{C} \ . \tag{D1-17}$$

Biorąc pod uwagę schemat Falka wykonamy tę operację następująco:

$$\begin{array}{c|l} & \boldsymbol{C} \\ \hline \boldsymbol{K}_e & \boldsymbol{K}_e\boldsymbol{C} \\ \hline \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{C} = \boldsymbol{K} \end{array} \tag{D1-18}$$

Podamy niektóre własności mnożenia macierzy.
Mnożenie macierzy nie jest przemienne:

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \ , \tag{D1-19}$$

co ilustrujemy przykładem.

Przykład D1-2

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \ ,$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} \ .$$

Mnożenie macierzy jest łączne:

$$(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{BC}) \tag{D1-20}$$

oraz rozłączne względem dodawania:

$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC} \ . \tag{D1-21}$$

D1.2.5. Potęgowanie macierzy. Wielomian macierzy

Mnożyć przez siebie można tylko macierze kwadratowe. Potęga r-ta ($r \geqslant 0$) kwadratowej macierzy A wynosi

$$\boldsymbol{A}^r = \underbrace{AAA\ldots A}_{r \text{ razy}} \ , \qquad \text{oraz } \boldsymbol{A}^0 = I \text{ (macierz jednostkowa)} \tag{D1-22}$$

Słuszna jest równość

$$\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{A}^q = \boldsymbol{A}^{p+q} \ . \tag{D1-23}$$

Niech dany jest wielomian:
$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$.
Wartością tego wielomianu dla $x = \boldsymbol{A}$, gdzie $\boldsymbol{A}$ – macierz kwadratowa, jest następująca macierz:

$$P(\boldsymbol{A}) = \alpha_0\boldsymbol{I} + \alpha_1\boldsymbol{A} + \alpha_2\boldsymbol{A}^2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{A}^k \ . \tag{D1-24}$$

Jeżeli $P(\boldsymbol{A}) = 0$ (macierz zerowa), to macierz $\boldsymbol{A}$ nazywa się pierwiastkiem wielomianu $P(x)$.

D1.2.6. Odwracanie macierzy

Macierz $\boldsymbol{A}^{-1}$ jest macierzą odwrotną do kwadratowej macierzy $\boldsymbol{A}$, jeśli

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \ , \tag{D1-25}$$

$\boldsymbol{I}$ – macierz jednostkowa.

Jeżeli wyznacznik macierzy $\boldsymbol{A}$ jest różny od zera, to istnieje jednoznacznie określona macierz odwrotna do niej. Jest to warunek konieczny i wystarczający istnienia macierzy odwrotnej.

Niech $\boldsymbol{A}$ jest nieosobliwą macierzą kwadratową (tzn. $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$), a A_{ij} dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}. Dopełnienie algeraiczne elementu a_{ij} jest to liczba obliczalna wg wzoru

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \ , \tag{D1-26}$$

gdzie M_{ij} jest wyznacznikiem macierzy powstałej z macierzy $\boldsymbol{A}$ przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Oznaczmy przez $\boldsymbol{A}^C$ macierz dopełnień algebraicznych, a przez $(\boldsymbol{A}^C)^T$ jej transpozycję:

$$(\boldsymbol{A}^C)^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \ . \tag{D1-27}$$

Transponowaną macierz dopełnień algebraicznych nazywa się macierzą dołączoną do macierzy $\boldsymbol{A}$. Macierz odwrotną $\boldsymbol{A}^{-1}$ można otrzymać dzieląc wszystkie elementy macierzy dołączonej przez $\det(\boldsymbol{A})$ – wyznacznik macierzy $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} (\boldsymbol{A}^C)^T \ . \tag{D1-28}$$

Prawdziwe są następujące równości:

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \ , \quad \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \ , \quad (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A} \ , \quad (\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T.$$

D1.2.7. Macierz ortogonalna

Kwadratowa macierz $\boldsymbol{A}$ jest ortogonalna, jeżeli jej transpozycja równa jest macierzy odwrotnej:

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1} \ . \tag{D1-29}$$

Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy 1 lub -1.

D1.2.8. Różniczkowanie i całkowanie macierzy

Operacje te dotyczą macierzy, których elementami są funkcje. Jeżeli

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix} \ , \tag{D1-30}$$

to

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_i} & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial f_{1n}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_i} & \frac{\partial f_{22}}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{m1}}{\partial x_i} & \frac{\partial f_{m2}}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial f_{mn}}{\partial x_i} \end{bmatrix} , \tag{D1-31}$$

oraz

$$\int_{x_1} \dots \int_{x_r} F dx_1 \dots dx_r = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \dots & I_{1n} \\ I_{21} & I_{22} & \dots & I_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{m1} & I_{m2} & \dots & I_{mn} \end{bmatrix} , \tag{D1-32}$$

gdzie $I_{ik} = \int_{x_1} \dots \int_{x_r} f_{ik} dx_1 \dots dx_r$.

D1.2.9. Różniczkowanie względem macierzy

Wektor pochodnych cząstkowych funkcji $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ zmiennych niezależnych x_i można zapisać tak:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_r} \end{bmatrix} . \tag{D1-33}$$

D1.2.10. Rząd macierzy

Liczba równa maksymalnemu stopniowi nieosobliwej macierzy kwadratowej wyjętej z danej macierzy nazywa się rzędem macierzy, np. z macierzy

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{D1-34}$$

można wyjąć trzy macierze kwadratowe drugiego stopnia

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} , \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} , \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} , \tag{D1-35}$$

przy czym: $\det(\boldsymbol{B}) = 0$, $\det(\boldsymbol{C}) = -4$, zatem rząd macierzy $\boldsymbol{A}$ jest równy 2; $r(A) = 2$. Rząd macierzy nie ulega zmianie przy jej dowolnych przekształceniach elementarnych (patrz pkt. D1.3.2).

D1.3. Rozwiązywanie ogólnego układu równań liniowych

D1.3.1. Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Dany jest układ n-równań z m-niewiadomymi, przy czym n nie musi być równe m, w postaci:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned} \qquad \text{(D1-36)}$$

Niech $r(\boldsymbol{A})$ oznacza rząd macierzy współczynników przy niewiadomych x_i, a $r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ – rząd macierzy powstałej z macierzy $\boldsymbol{A}$ przez jej rozszerzenie o jedną kolumnę, zawierającą wyrazy b_i.

Prawdziwe jest twierdzenie (Kroneckera-Capellego):

Układ równań (D1-36) ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r$$

Ponadto:

1) układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $r = m$ (liczbie niewiadomych),

2) układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $m - r$ parametrów, gdy $r < m$.

Układ równań jednorodnych ma zawsze rozwiązanie, ponieważ $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, 0)$. Jest to rozwiązanie zerowe. Rozwiązania niezerowe istnieją wówczas, gdy $r(\boldsymbol{A}) < m$ (np. gdy $\det(\boldsymbol{A}) = 0$).

D1.3.2. Elementarne przekształcenia macierzy

Elementarnymi przekształceniami pierwszego rodzaju macierzy A są:

1) przestawienie dwóch wierszy,

2) pomnożenie dowolnego wiersza przez liczbę różną od zera,

3) dodanie do wiersza krotności innego wiersza.

Elementarnym przekształceniem drugiego rodzaju są analogiczne działania dokonywane na kolumnach macierzy.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Każdą nieosobliwą macierz kwadradratową można przekształcić do macierzy jednostkowej w skończonej liczbie przekształceń elementarnych (pierwszego albo drugiego rodzaju).

Twierdzenie to można wykorzystać do znajdowania macierzy odwrotnej oraz do rozwiązywania układów równań liniowych postaci: $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ (pierwszy rodzaj) lub $\boldsymbol{YA} = \boldsymbol{B}$ (drugi rodzaj).

Przykład D1-3

Dana jest macierz nieosobliwa $\boldsymbol{A}$, por.[38]

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Za pomocą przekształceń elementarnych pierwszego rodzaju znaleźć macierz odwrotną $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Zadanie rozwiążemy dokonując jednoczesnych przekształceń elementarnych macierzy $\boldsymbol{A}$ i jednostkowej I przyrównując $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Kolejność działań jest następująca.

1) Na miejscu wiersza trzeciego zapiszemy różnicę: wiersz trzeci-drugi,

2) Na miejscu wiersza pierwszego zapiszemy różnicę: wiersz pierwszy-ostatni wiersz trzeci, a na miejscu wiersza drugiego różnicę: wiersz drugi-ostatni wiersz trzeci.

Otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Na miejscu wiersza drugiego zapiszemy teraz różnicę: wiersz pierwszy − wiersz drugi,

4) Otrzymany wiersz drugi mnożymy przez 5 i odejmujemy od wiersza pierwszego. Wynik podzielony przez −5 zapisujemy na miejscu wiersza pierwszego. Jest wtedy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Na miejscu wiersza trzeciego zapiszemy wynik działania: wiersz trzeci + drugi – 4 razy wiersz pierwszy. Wtedy elementy a_{31} i a_{32} będą równe zeru,

6) Na miejscu wiersza drugiego zapiszemy różnicę: wiersz drugi – pierwszy.

Macierz $\boldsymbol{A}$ przekształciła się w macierz jednostkową, a początkowa macierz jednostkowa w $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 14 & 1 \end{bmatrix} .$$

D1.4. Wartości i wektory własne

D1.4.1. Równanie charakterystyczne

Niech $\boldsymbol{A}$ jest macierzą kwadratową stopnia n, a $\boldsymbol{I}$ – macierzą jednostkową tego samego stopnia. Macierzą charakterystyczną nazywa się następującą macierz:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} , \qquad \text{(D1-37)}$$

gdzie λ jest zmienną niezależną.

Wyznacznik powyższej macierzy w postaci rozwiniętej jest wielomianem zmiennej λ stopnia n:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (-1)^n(\lambda^n + \psi_1\lambda^{n-1} + \ldots + \psi_{n-1}\lambda + \psi_n) \ . \tag{D1-38}$$

Wielomian ten nazywa się wielomianem charakterystycznym macierzy $\boldsymbol{A}$. Współczynniki ψ_i można wyrazić za pomocą elementów macierzy $\boldsymbol{A}$. W szczególności:

$$\begin{gathered} \psi_1 = (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) \ , \\ \psi_n = (-1)^n \det(\boldsymbol{A}) \end{gathered} \tag{D1-39}$$

Równanie $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$, tzn.

$$\lambda^n + \psi_1\lambda^{n-1} + \ldots + \psi_{n-1}\lambda + \psi_n = 0 \tag{D1-40}$$

jest równaniem charakterystycznym macierzy $\boldsymbol{A}$, a jego pierwiastki – wartościami własnymi (liczbami charakterystycznymi) macierzy $\boldsymbol{A}$.

Jeżeli liczba λ jest wartością własną macierzy $\boldsymbol{A}$, to następujący układ równań:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X} \tag{D1-41}$$

ma niezerowe rozwiązanie $\boldsymbol{X}$. Rozwiązanie to nazywa się wektorem własnym macierzy $\boldsymbol{A}$.

Układ równań (D1-39) jest jednorodny i dlatego ma rozwiązanie niezerowe tylko wtedy, gdy wyznacznik współczynników przy niewiadomych $\boldsymbol{X}$ jest równy zeru:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \ .$$

Rozwiązanie to jest wyznaczone z dokładnością do dowolnego czynnika i dlatego w celu uniknięcia wieloznaczności wektory własne normalizuje się.

Warto zauważyć, że wartości własne mogą być liczbami zespolonymi, chociaż macierz $\boldsymbol{A}$ jest rzeczywista. Można wykazać, że dla macierzy symetrycznej wszystkie wartości własne i wektory własne są rzeczywiste. Ponadto wektory własne są ortogonalne i można je unormować tak, że

$$\boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{X}_k = \delta_{ik} \ , \tag{D1-42}$$

gdzie $\boldsymbol{X}_i$ – wektor własny odpowiadający i-tej wartości własnej, a δ_{ik} – delta Kroneckera ($\delta_{ik} = 0$ dla $i \neq k$ oraz $\delta_{ik} = 1$ dla $i = k$).

Przykład D1-4

Określimy wartości i wektory własne następującej macierzy, por.[38]:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Przyrównując wyznacznik macierzy charakterystycznej do zera:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0 \ ,$$

którego pierwiastki są następujące:

$$\lambda_1 = 4,7913 \ , \qquad \lambda_2 = 1,0 \ , \qquad \lambda_3 = 0,2087$$

Są to wartości własne macierzy $\boldsymbol{A}$. Wektory własne otrzymamy rozwiązując dla poszczególnych λ_i następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

Np. dla $\lambda_3 = 0,2087$, $x_3 = 1$ równanie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} (3 - 0.2087)x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \\ 2x_1 + (2 - 0,2087)x_2 + 1 = 0 \\ 0 + x_2 + (1 - 2087)(1) = 0 \end{aligned}$$

Stąd wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_3 ma postać:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2087 \\ -0,7913 \\ 1,0000 \end{bmatrix} \ .$$

Przedstawiona metoda obliczania wartości i wektorów własnych jest jednak bardzo nieefektywna z uwagi na konieczność rozwijania wyznacznika.

Przedstawimy prostą metodę iteracyjną obliczania wartości własnych zwaną metodą potęg. Metoda ta zawodzi w przypadku występowania pierwiastków wielokrotnych równania charakterystycznego, a także gdy wartości własne leżą blisko siebie. Jest jednak bardzo wygodna dla oszacowania pierwszej największej wartości własnej, co ma bardzo duże znaczenie przy rozwiązywaniu problemów inżynierskich.
Metodę tę objaśnimy posługując się przykładem.

Przykład D1-5

Obliczymy pierwszą wartość własną macierzy podanej w przykładzie D1-4. Załóżmy wpierw pewien początkowy wektor własny, por. [38]

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Wykonajmy mnożenie

$$\boldsymbol{AX} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a wektor, który otrzymaliśmy znormalizujemy. Zatem

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6667 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

Wykonajmy mnożenie powtórnie, przy użyciu obliczonego znormalizowanego wektora.

$$\boldsymbol{AX} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,6667 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,3334 \\ 3,3334 \\ 0,6667 \end{bmatrix} = 4,3334 \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,7692 \\ 0,1539 \end{bmatrix}$$

Proces ten możemy powtarzać, aż do uzyskania wymaganej zbieżności. Oto kolejne wyniki mnożenia $\boldsymbol{AX}$:

$$4,6923 \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,7868 \\ 0,1967 \end{bmatrix} , \qquad 4,7705 \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,7904 \\ 0,2062 \end{bmatrix} , \qquad 4,7870 \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,7911 \\ 0,2082 \end{bmatrix} ,$$

$$4,7904 \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,7912 \\ 0,2086 \end{bmatrix} , \qquad 4,7910 \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,7910 \\ 0,2087 \end{bmatrix} ,$$

$$4,7915 \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,7913 \\ 0,2057 \end{bmatrix} , \qquad 4,7913 \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,7913 \\ 0,2057 \end{bmatrix} .$$

Otrzymaliśmy zatem, że największa wartość własna wynosi 4,7913.

D1.4.2. Twierdzenie Hamiltona-Cayleya

Każda macierz kwadratowa a jest pierwiastkiem swojego równania charakterystycznego (tj. równania D1-37):

$$\boldsymbol{A}^n + \psi_1 \boldsymbol{A}^{n-1} + \ldots + \psi_{n-1} \boldsymbol{A} + \psi_n \boldsymbol{I} = 0 \; . \tag{D1-43}$$

Twierdzenie to można wykorzystać do znajdowania macierzy odwrotnej $\boldsymbol{A}^{-1}$. Jeżeli macierz $\boldsymbol{A}$ jest nieosobliwa, to zgodnie z (D1-37) $\psi_n \neq 0$, mnożąc zatem równanie (D1-41) przez $\boldsymbol{A}^{-1}$ i dzieląc przez ψ_n otrzymujemy

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\psi_n}(\boldsymbol{A}^{n-1} + \psi_1 \boldsymbol{A}^{n-2} + \ldots + \psi_{n-1} \boldsymbol{I}) \tag{D1-44}$$

Przy wykorzystaniu tego wzoru wygodnie jest współczynniki ψ_i równania charakterystycznego obliczać według wzorów:

$$\begin{aligned}
&\psi_1 = -S_1 \; , \\
&\psi_2 = -\frac{1}{2}(\psi_1 S_1 + S_2) \; , \\
&\psi_3 = -\frac{1}{3}(\psi_2 S_1 + \psi_1 S_2 + S_3) \; , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; , \\
&\psi_n = -\frac{1}{n}(\psi_{n-1} S_1 + \psi_{n-2} S_2 + \ldots + \psi_1 S_{n-1} + S_n) \; ,
\end{aligned}$$

gdzie S_p oznacza ślad macierzy $\boldsymbol{A}^p$. Ślad macierzy jest sumą jej elementów leżących na diagonali.

D1.4.3. Macierze podobne

Dwie macierze kwadratowe $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ tego samego stopnia nazywa się podobnymi, jeżeli istnieje nieosobliwa macierz $\boldsymbol{T}$ taka, że:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \ . \tag{D1-45}$$

Warunek ten może być zapisany w postaci:

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \ . \tag{D1-46}$$

Macierze te mają takie samo równanie charakterystyczne, tzn.: jednakowe wartości własne, ślad i wyznacznik. Odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe, istnieją macierze o tym samym równaniu charakterystycznym, które nie są do siebie podobne.

D1.5. Informacje dodatkowe

D1.5.1. Macierze kongruentne

Dwie symetryczne macierze $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{T}$ tego samego stopnia nazywa się kongruentnymi, jeżeli

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \ . \tag{D1-47}$$

Wśród macierzy kongruentnych do danej macierzy $\boldsymbol{A}$ zawsze można znaleźć macierz diagonalną.

D1.5.2. Kryterium Sylvestra dodatniej określoności macierzy

Na to, aby symetryczna macierz $\boldsymbol{A} = [ca_{ij}]$ była dodatnio określona, potrzeba i wystarcza, aby każdy z wyznaczników

$$a_{11} \ , \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ , \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \ , \ \ldots \ , \ \det(\boldsymbol{A})$$

był dodatni.